תורת הקבוצות, תרגיל 7

1. נתבונן בפונקציה $f: N \times N \to N$ המוגדרת ע"י $f(a,b) = 2^a \cdot 3^b$.
א. הוכח, כי f חח"ע.
ב. הסק מסעיף א' (באמצעות משפט קנטור ברנשטיין) כי קבוצת המספרים הרציונליים הינה בת מניה.
ג. השתמש בהכללה של הפונקציה f כדי להוכיח, שלכל $k \in N$ הקבוצה $N^k = N \times N \times ... \times N$ (k פעמים) הינה בת מניה.
ד. השתמש בהכללה נוספת של f ובכך שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית כדי להוכיח שקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים גם היא בת מניה.

2. א. יהי n מספר טבעי. הוכח, כי קבוצת הפולינומים ממעלה n עם מקדמים שלמים היא בת מניה.
ב. הוכח שהקבוצה S של כל השורשים של פולינומים ממעלה n עם מקדמים שלמים היא בת מניה.
ג. השתמש בכל התוצאות עד כה כדי להוכיח שקבוצת המספרים האלגבריים היא בת מניה. (תזכורת: מספר אלגברי הוא שורש של פולינום עם מקדמים שלמים).

3. יהי α סודר.
א. הוכח, כי הקבוצה $\alpha \cup \{\alpha\}$ גם היא סודר.
ב. הוכח, כי אם $\beta \subseteq \alpha$ ו- $\beta \neq \alpha$ אז $\beta \in \alpha$.
ג. יהי β סודר כך ש $\alpha \subseteq \beta$ אבל $\alpha \neq \beta$. הוכח, כי $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

4. א. מצא קבוצה שהסודר המתאים לה הוא $\omega + 1$.
ב. מהו הסודר המתאים לקבוצה $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$ עם הסדר הרגיל?
ג. תאר במפורש קבוצה סדורה היטב המתאימה לסכום הסודרים $\omega + (\omega + 1)$.
ד. האם $\omega + (\omega + 1) = (\omega + 1) + \omega$?

תאריך ההגשה: 13.4.2005